Objetivos da Aerostática - **unidade 2:**

Reescrever a equação de Clapeyron, viabilizando sua utilização em sistemas abertos;

Mostrar a variação da massa molecular do ar em função da altitude;

Estabelecer a restrição para o estudo proposto da aerostática;

Reescrever o teorema de Stevin, com o objetivo de obter sua equação diferencial;

Definir o que se considera por aerostática;

Mostrar como se determina a aceleração da gravidade local;

Mostrar a variação da temperatura do ar em função da altitude, quando o mesmo é considerado em repouso;

Determinar as equações básicas da aerostática;

Propor a nova tarefa.

2.8 Aerostática

Neste item estudamos as leis dos gases em repouso. A restrição para o estudo apresentado é que os gases abordados, serão considerados gases perfeitos, ou seja, aqueles que além de obedecerem a equação de estado apresentam, tanto o calor específico a pressão constante (c_p) como o calor específico a volume constante (c_v), inalterados ao longo do processo considerado.

2.8.1 Equação de estado de um gás perfeito

A equação utilizada em nossos estudos é oriunda da equação de Clapeyron, que está representada pela equação 2.9.

$$\mathbf{p \,.\, V = n \,.\, R \,.\, T} \qquad \textbf{Equação 2. 9}$$

onde:

- $p \rightarrow$ pressão absoluta do gás;
- $V \rightarrow$ volume do gás;
- $n \rightarrow$ número de moles do gás;
- $R \rightarrow$ constante universal dos gases $\rightarrow R = 8316 \dfrac{J}{kg\,K}$;
- $T \rightarrow$ temperatura do gás na escala absoluta, que é também denominada de temperatura termodinâmica.

A equação de Clapeyron (equação 2.9) não é adequada para sistemas abertos, já que não seria possível estabelecer o seu volume e nem a sua massa.

Como a aerostática é um exemplo típico de sistema aberto, há a necessidade de reescrever a equação 2.9, possibilitando a sua utilização neste tipo de sistema. Neste intuito, evocamos o conceito de número de moles:

$$\mathbf{n} = \frac{m}{M} \qquad \textbf{Equação 2. 10}$$

onde:

- $m \rightarrow$ massa do gás;
- $M \rightarrow$ massa molecular do gás.

Observação: Para os gases perfeitos, geralmente a massa molecular (M) permanece constante. O gráfico 2.1 procura mostrar a variação da massa molecular do ar em função da altitude.

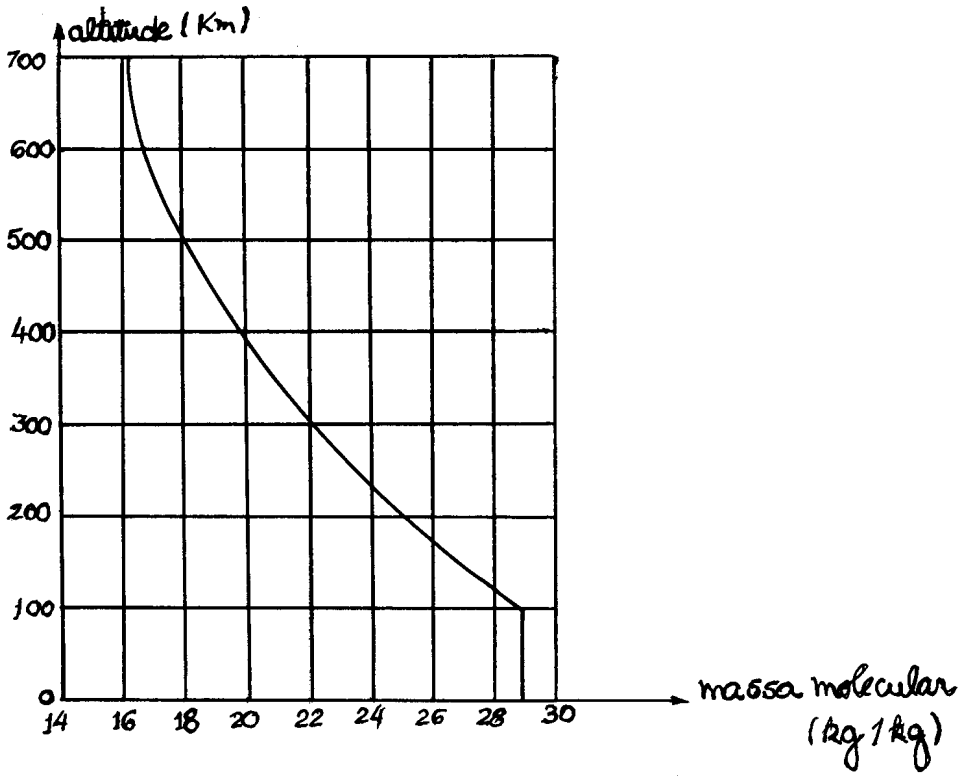

Gráfico 2. 1

Limitando nosso estudo a uma altitude de 100 km, podemos considerar a massa molecular constante.

Da equação 2.9 e 2.10, obtemos a equação de estado (equação 2.11) utilizada na Mecânica dos Fluidos:

$$\mathbf{p} \cdot \frac{1}{\rho} = \mathbf{R_g} \cdot \mathbf{T} \qquad \textbf{Equação 2. 11}$$

onde:

- $\rho \rightarrow$ massa específica do gás = $\frac{m}{V}$
- $R_g \rightarrow$ constante do gás = $\frac{R}{M}$

Observação: Define-se volume específico como sendo o inverso da massa específica.

2.8.2 Teorema de Stevin

Evoquemos a equação 2.5:

$$p_1 - p_2 = \gamma \cdot h .$$

Considerando: p_1 como a pressão em um ponto de cota h e p_2 como a pressão de referência, reescrevemos a equação anterior:

$$\mathbf{p_{cota\ h} = p_{referência} + \gamma \cdot h} \qquad \textbf{Equação 2. 12}$$

Da equação 2.12, concluímos que a pressão de um fluido aumenta com a profundidade, portanto ao considerar o eixo z como o eixo da altitude, onde z = 0 no nível do mar, podemos afirmar que a pressão diminui com a altitude, como mostra a equação 2.13.

$$\mathbf{p_{cota\ h} = p_{referência} - \gamma \cdot z} \qquad \textbf{Equação 2. 13}$$

Adotando-se a $p_{referência}$ com constante e desprezando-se a variação do peso específico em um dz, ao diferenciar a equação 2.13, resulta:

$$\mathbf{dp = - \gamma \cdot dz = - \rho \cdot g \cdot dz} \qquad \textbf{Equação 2. 14}$$

A equação 2.14 permitirá iniciar o estudo da **aerostática**, já que a mesma estuda a variação da pressão do ar, considerado em repouso, em função da altitude (z), onde seu peso específico será obtido através da equação de estado.

2.8.3 Estudo da variação da pressão atmosférica em função da altitude (z)

Sabendo que o ar atmosférico, pode ser considerado como gás perfeito até pressões iguais a 3 atm. e considerando a pressão de referência ao nível do mar igual a 1 atm., podemos afirmar que em nosso estudo da aerostática o ar será sempre considerado como gás perfeito.

A equação fundamental (equação 2.15) da aerostática é originada das equações 2.11 e 2.14.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_{ar} \times T} \times dz \qquad \textbf{Equação 2. 15}$$

Recordando que o nosso estudo está restrito a z = 100 km, podemos afirmar que o R_{ar} é constante e aproximadamente igual a 287 $\frac{m^2}{s^2 . K}$.

Resta verificar a variação, tanto da aceleração da gravidade (g) como da temperatura, em função da altitude (z).

Estudo da variação da aceleração da gravidade com a altitude.

Evocando o conceito de campo de gravidade da Terra e o estabelecido por Somigliana e Silva em 1930 em Stolcomo, temos acesso a **fórmula internacional da gravidade:**

$$\mathbf{g_\varphi = 978{,}049 \,.\, (1 + 0{,}005288 \,.\, sen^2 \varphi - 0{,}0000059 \,.\, sen^2 2\varphi)} \qquad \textbf{Equação 2. 16}$$

onde:

- $g_\varphi \rightarrow$ é a aceleração da gravidade em função da latitude (φ) ao nível do mar;
- 978,049 $\rightarrow$ é o valor de referência da aceleração da gravidade em cm / s^2 considerado na linha do Equador;
- $\varphi \rightarrow$ latitude.

Determinada a aceleração em função da latitude ao nível do mar, recorre-se a balança de Jolly para obter a variação da intensidade do campo da gravidade em relação a altitude, como mostra a equação 2.17:

$$\mathbf{g_Z = g_\varphi \,.\, (1 - 0{,}000000309 \,.\, z)} \qquad \textbf{Equação 2. 17}$$

Observação: Em nosso estudo optamos em trabalhar com a aceleração normal média, que é igual a 9,81 m / s^2 e considerada constante.

Com esta consideração e respeitando a restrição de z = 100 km, mostramos através do gráfico 2.2 a variação da temperatura (T) em função da altitude.

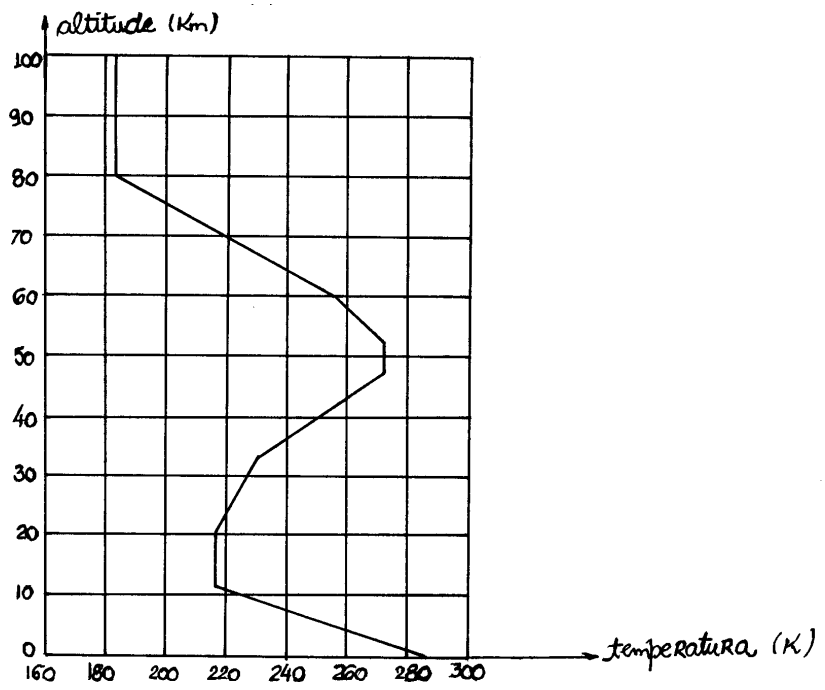

Gráfico 2. 2

Através do gráfico 2.2, observamos que temos basicamente dois tipos de variações:

1ª - a temperatura varia linearmente com z, portanto: $T = T_{ref.} + k \,.\, (z - z_{ref.})$;

2ª - a temperatura permanece constante (processo isotérmico).

Considerando as variações lineares e diferenciando a sua função, temos:

$$\mathbf{dT = k \,.\, dz \quad \therefore \quad dz = \frac{dT}{k}} \qquad \textbf{Equação 2. 18}$$

Da equação 2.18 na equação 2.15, obtemos a equação geral para o estudo da variação da pressão atmosférica em função da altitude nas regiões onde a temperatura varia linearmente com a altitude (equação 2.19).

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_{ar} \cdot k} \cdot \frac{dT}{T} \qquad \textbf{Equação 2. 19}$$

Observação: A grandeza k da equação 2.19 representa o coeficiente angular da reta que representa a variação da temperatura em função da altitude, coeficiente este que muda de região para região.

Integrando-se a equação 2.19 de $p_{ref.}$ à p_z e $T_{ref.}$ à T_z, resulta:

$$p_z = p_{ref.} \cdot \left[\frac{T_{ref.} + k \cdot (z - z_{ref.})}{T_{ref.}} \right]^{\frac{-g}{R_{ar} \cdot k}} \qquad \textbf{Equação 2. 20}$$

No intuito de exemplificar a equação 2.20, consideramos a região de altitude maior que zero e menor e igual a 10668m, onde temos:

- $p_{ref.} = 1$ atm = 760 mm Hg = 10330 kgf/m^2 = 10,33 mca = 14,7 psi = ...;
- $T_{ref.} = 288$ K;
- $z_{ref.} = 0$;

resulta:

$$k \cong -0{,}0065 \ \frac{K}{m}$$

$$p_z = 1 \cdot \left(\frac{288 - 0{,}0065z}{288} \right)^{\frac{g}{0{,}0065 . R_{ar}}} \qquad \textbf{Equação 2. 21}$$

onde a pressão é obtida em atm.

Nas regiões (gráfico 2.2) onde o processo é isotérmico, utilizamos diretamente a equação 2.15.

Integrando a equação 2.15 de $p_{ref.}$ à p_z e $z_{ref.}$ à z, resulta:

$$p_z = p_{ref.} \cdot e^{\frac{-g \,.\, (z - z_{ref.})}{R_{ar} \cdot T_{ref.}}} \qquad \textbf{Equação 2. 22}$$

No intuito de exemplificar a equação 2.22, consideramos a região de altitude maior que 10668 m e menor e igual a 20000m, onde temos:

- $p_{ref.} = p_{10668}$, que é calculada através da equação 2.21;
- $T_{ref.} = T_{10668}$;
- $z_{ref.} = 10668$ m.

$$p_z = p_{10668} \cdot e^{\frac{-g\,.\,(z\,-10668)}{R_{ar} \cdot T_{10668}}} \qquad \textbf{Equação 2. 23}$$

Tarefa:

Para a próxima aula preparar um seminário, no qual irá:

- explicar tanto o conceito de processo isobárico, como de processo isocórico (ou isométrico);
- explicar tanto o conceito do calor específico à pressão constante, como a volume constante;
- explicar porque não se utiliza a equação de Clapeyron no estudo da aerostática;
- mencionar porque se diferencia uma dada equação (usar para esta explanação as equações: 2.13 e 2.14);
- mostrar que $\frac{J}{kg\,.\,K} = \frac{m^2}{s^2\,.K}$;
- mostrar como se determina o peso específico do ar a uma altitude z;
- explicar que está correto considerar o ar como gás perfeito no estudo da aerostática;
- efetuar a leitura adequada da equação 2.15;
- especificar as variáveis que influenciam na determinação da aceleração da gravidade local;
- dar o conceito de latitude;
- mostrar o cálculo, tanto da pressão como da temperatura, para a altitude de 10668 m;
- justificar através dos conceitos abordados na aerostática, que é correto considerar a pressão do gás constante em aparelhos de instrumentações;

- mostrar como podemos adaptar um barômetro em altímetro;
- explicar a resolução de um dos exercícios propostos.

Através da Reeducação, eliminam-se velhos paradigmas:

Quando eu era menino

tinha um cachorro

e uma a beleza de passarinho

mas o tempo passou

daqui a pouco

eu morro

e é só tristeza

no meu caminho.

Raimundo Ferreira Ignácio