

Objetivos da quinta aula da unidade 4:

Introduzir os adimensionais típicos das bombas hidráulicas e propor a obtenção da sua curva universal através do exercício 4.14.17.

4.12 Adimensionais Típicos das Bombas Hidráulicas

Antes de propor os exercícios, vamos nos deter em uma aplicação bastante importante da **análise dimensional** para o estudo da Mecânica dos fluidos, que é a sua aplicação às **máquinas hidráulicas** em particular às **bombas hidráulicas**.

Esta aplicação é comumente usada pelos fabricantes das bombas pelos seguintes motivos:

(1°) → **minimizar os custos e otimizar o tempo para ensaios;**

(2°) → **obter características hidráulicas das bombas, cujas dimensões excedam as permitidas pelas suas bancadas de testes.**

As figuras 4.4 a e 4.4 b procuram dar exemplos de bombas reais e bombas em modelo reduzido.

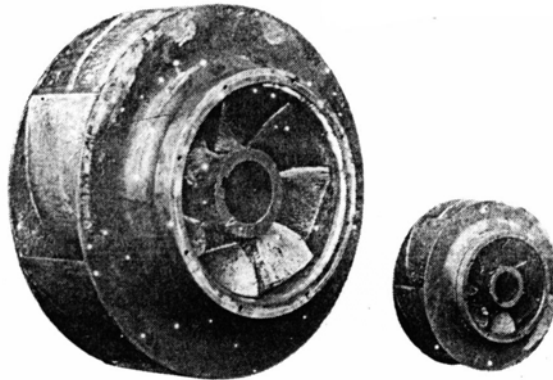


Figura 4.4 a

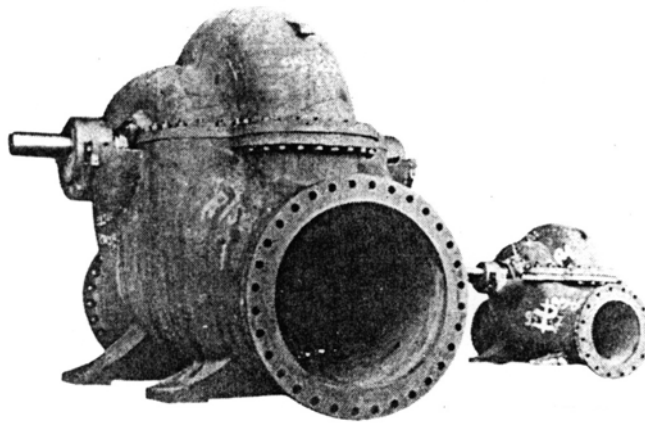


Figura 4.4 b

A função característica do fenômeno pode ser representada pelas seguintes variáveis:

N_m – **potência da máquina hidráulica, no caso N_B potência da bomba;**

D_r – **diâmetro do rotor;**

n – **rotação da bomba;**

Q – **vazão de escoamento do fluido que atravessa a bomba;**

γH_B – **variação de pressão estática entre a entrada e saída do fluido, considerando o diâmetro da entrada igual ao diâmetro da saída;**

ρ – **massa específica do fluido que atravessa a bomba;**

μ – **viscosidade dinâmica do fluido que atravessa a bomba;**

E – **elasticidade.**

Portanto:

$$f(N_B, D_r, n, Q, \gamma H_B, \rho, \mu, E) = 0.$$

A partir da função característica conhecida, podemos aplicar o **teorema dos π** :

(1º) → **número de variáveis que causam influência no fenômeno → $n=8$**

(2º) → **Equação dimensional de cada uma das**

$$[N_B] = F_x L_x T^{-1}$$

$$[D_r] = L$$

$$[n] = T^{-1}$$

$$[Q] = L^3 \times T^{-1}$$

$$[\gamma H_B] = F \times L^{-2}$$

$$[\rho] = F \times L^{-4} \times T^2$$

$$[\mu] = F \times L^{-2} \times T$$

$$[E] = F \times L^{-2}$$

(3°) $\rightarrow k \rightarrow$ **número de grandezas fundamentais envolvidas no fenômeno** $\rightarrow k=3$

(4°) $\rightarrow m \rightarrow$ **número de números adimensionais** $\rightarrow m = n - k \therefore m = 5$

$\Omega \Rightarrow$ **função equivalente do fenômeno formada só por número adimensionais.**

$$\Omega (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = 0$$

(5°) \rightarrow **base dos adimensionais** $\rightarrow \rho, n, D_r$.

(6°) \rightarrow **números adimensionais** \rightarrow

$$\pi_1 = \rho^{x_1} \cdot n^{x_2} \cdot D_r^{x_3} \cdot \gamma H_B \quad (\text{I})$$

$$\pi_2 = \rho^{y_1} \cdot n^{y_2} \cdot D_r^{y_3} \cdot Q \quad (\text{II})$$

$$\pi_3 = \rho^{z_1} \cdot n^{z_2} \cdot D_r^{z_3} \cdot N_B \quad (\text{III})$$

$$\pi_4 = \rho^{\alpha_1} \cdot n^{\alpha_2} \cdot D_r^{\alpha_3} \cdot \mu \quad (\text{IV})$$

$$\pi_5 = \rho^{\theta_1} \cdot n^{\theta_2} \cdot D_r^{\theta_3} \cdot E \quad (\text{V})$$

Para obtermos os expoentes dos números adimensionais, procedemos como é mostrado abaixo:

$$(\text{I}) F^0 L^0 T^0 = (F \times L^{-4} \times T^2)^{x_1} \cdot (T^{-1})^{x_2} \cdot (L)^{x_3} \cdot F \times L^{-2}$$

$$F^0 L^0 T^0 = F^{x_1+1} \cdot L^{-4x_1+x_3-2} \cdot T^{2x_1-x_2}$$

$$x_1+1 = 0 \rightarrow x_1 = -1$$

$$2x_1 - x_2 = 0 \rightarrow -2 - x_2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$$

$$-4 x_1 + \alpha_3 - 2 = 0 \rightarrow 4 + x_3 - 2 = 0 \rightarrow x_3 = -2$$

$$\therefore \pi_1 = \rho^{-1} \cdot n^{-2} \cdot D_r^{-2} \cdot \gamma H_B \rightarrow \pi_1 = \frac{\gamma H_B}{\rho \cdot n^2 \cdot D_r^2} \quad \text{ou}$$

$$\pi_1 = \psi = \frac{gH_B}{n^2 \cdot D_r^2} \rightarrow \text{denominado de } \mathbf{coeficiente\ manométrico}.$$

Analogamente, obtemos:

$$\pi_2 = \phi = \frac{Q}{n \cdot D_r^3} \rightarrow \text{denominado de } \mathbf{coeficiente\ de\ vazão}.$$

$$\pi_3 = \chi = \frac{N_B}{\rho \cdot n^3 \cdot D_r^5} \rightarrow \text{denominado de } \mathbf{coeficiente\ de\ potência}.$$

$$\pi_4 = \frac{\rho \cdot n \cdot D_r^2}{\mu} \rightarrow \text{que é um adimensional proporcional ao } \mathbf{número\ de\ Reynolds}.$$

$$\pi_5 = \frac{\rho \cdot n^2 \cdot D_r^2}{E} \rightarrow \text{denominado de } \mathbf{número\ de\ Cauchy}.$$

Os números adimensionais mencionados anteriormente poderiam representar as seguintes funções equivalentes:

$$(1) \chi = \Omega' (\psi, \phi, Re, C) = \frac{N_B}{\rho \cdot n^3 \cdot D_r^5}$$

$$(2) \phi = \Omega'' (\psi, \chi, Re, C) = \frac{Q}{n \cdot D_r^3}$$

$$(3) \psi = \Omega''' (\phi, \chi, Re, C) = \frac{gH_B}{n^2 \cdot D_r^2}$$

Por outro lado, devemos lembrar que existe uma relação entre N_B , H_B e Q , já que:

$$\eta_B = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_B}{N_B} \quad \text{e que o } \mathbf{número\ de\ Cauchy\ só\ deve\ ser\ levado\ em}$$

consideração para escoamentos compressíveis; portanto considerando escoamentos incompressíveis, temos:

- $Q = \phi n D_r^3$
- $gH_B = \psi n^2 D_r^2$

- $N_B = \chi \rho n^3 D_r^5$, o que resulta:

$$\eta_B = \rho \cdot \Phi \cdot n \cdot D_r^3 \cdot \Psi \cdot n^2 \cdot D_r^2 \cdot \frac{1}{\chi \rho n^3 \cdot D_r^5}$$

$$\therefore \eta_B = \frac{\Phi \cdot \Psi}{\chi} = \Omega^{IV}(\text{Re})$$

Onde o efeito do número de Reynolds deve ser considerado sempre que:

$$|D_r \text{ prototipo} - D_r \text{ modelo}| > 10\%$$

Além disto, podemos recorrer a expressão estabelecida por Moody, onde temos que:

$$\frac{1 - \eta_m}{1 - \eta_p} = \left(\frac{D_p}{D_m}\right)^{1/4}$$

Na prática da engenharia aparece um outro parâmetro de real importância para o estudo de semelhanças de máquinas hidráulica, que é denominado de **rotação específica** (n_s), que é a rotação da máquina hidráulica quando a mesma apresenta uma carga manométrica unitária e vazão unitária.

Define-se numericamente a **rotação específica** (n_s) da seguinte forma:

$$n_s = \frac{n Q^{1/2}}{H_B^{3/4}} \text{ onde } Q \text{ e } H_B, \text{ e } n \text{ são consideradas respectivamente em } m^3/s, m \text{ e rpm}$$

e lidas no ponto de projeto, aquele onde se tem o $\eta_{B_{\text{máx}}}$.

Conclusão → Para escoamentos incompressíveis, onde desejamos colher informações para um protótipo (bomba) através de um modelo (bomba), geralmente reduzido, segundo as normas do **Hydraulic Institute Standards**, devemos ter:

1° → **semelhança hidráulica**, o que equivale a dizer que a rotação específica, tanto do protótipo, como do modelo, é igual.

2° → **semelhança hidrodinâmica**, o que equivale a dizer que as dimensões relevantes, como o ângulo da pá, área da garganta, etc. ...devem respeitar a escala geométrica:

$$K_L = \frac{D_{r_m}}{D_{r_p}}$$

A partir destas condições o estudo de semelhança é feito através dos seguintes números adimensionais:

- **coeficiente manométrico** $\rightarrow \psi = \frac{gH_B}{n^2 \cdot D_r^2}$

- **coeficiente de vazão** $\rightarrow \phi = \frac{Q}{n \cdot D_r^3}$

- **coeficiente de potência** $\rightarrow \chi = \frac{N_B}{\rho \cdot n^3 \cdot D_r^5}$

- **expressão de Moody:** $\frac{1 - \eta_{BP}}{1 - \eta_{Bm}} = \left(\frac{D_m}{D_p} \right)^{1/4}$



Eu com o Marcus Vinicius