

# Complemento de mecânica dos fluidos

Terceira aula

# Sintetizar as duas primeiras aulas

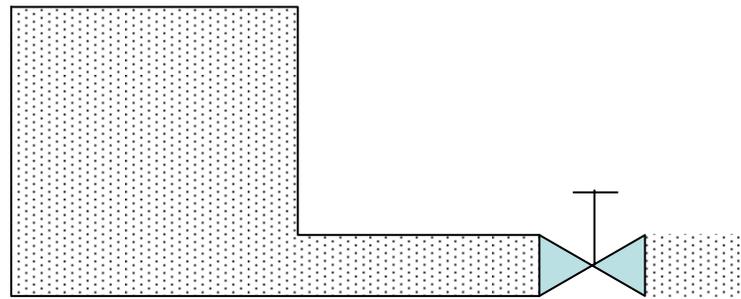
- Experiência do bocal convergente.
- Determinação do  $C_v$  e do  $C_d$ .
- Equação da continuidade de forma integral para um VC.
- Tempo de esvaziamento de um reservatório de seção transversal constante.



# Exercícios

10.1 (livro Brunetti p. 270 e 271) - Um reservatório contém um gás e tem uma válvula que controla a sua saída de forma que a pressão interna seja reduzida segundo a lei:  $p = p_0 (1 - \alpha t^2)$ . Sabe-se que durante a descarga a temperatura do gás do reservatório mantém-se constante (processo isotérmico  $p/\rho = \text{cte}$ ) e que no instante  $t = 10\text{s}$  a passagem de abertura da válvula tem uma área de  $0,5 \text{ m}^2$ . Determinar para o instante  $t = 10\text{s}$ :

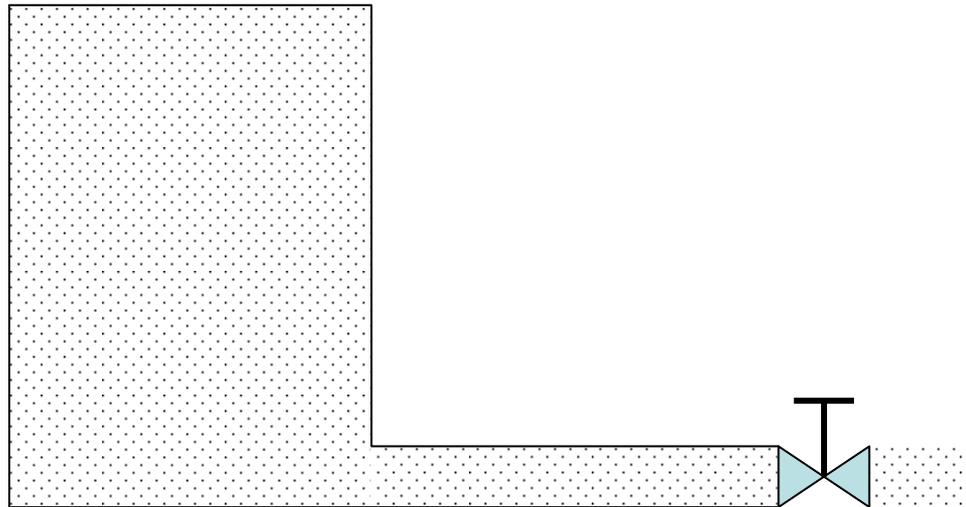
- a) a vazão em massa do gás;
- b) a vazão em volume;
- c) a velocidade média na seção de saída;
- d) a massa do gás que resta no reservatório;
- e) o tempo de esvaziamento do reservatório;
- f) a massa do gás no reservatório após o esvaziamento;
- g) traçar a curva de esvaziamento do reservatório  $m = m(t)$ .



$$\text{Dados : } V = 10\text{m}^3; \rho_0 = 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; p_0 = 10 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} (\text{abs});$$

$$\alpha = 0,005\text{s}^{-2}; p_{\text{atm local}} = 1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}.$$

# Resolução do exercício 10.1 - livro prof. Brunetti



Dados:

$$V = 10\text{m}^3$$

$$\rho_0 = 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p_0 = 10 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} (\text{abs})$$

$$\alpha = 0,005\text{s}^{-2}$$

$$P_{\text{atm}_{\text{local}}} = 1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$a) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \times \vec{n} dA = 0$$

Adotando um VC que envolva todo o fluido, tem-se fluxo apenas na seção de saída, onde  $\vec{v} \times \vec{n}$  é positivo. Além disso, nota-se que o volume do VC é constante, ao passo que, com o passar do tempo, tem-se a variação da massa específica do gás dentro do VC. Dessa forma:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \rho v A = 0$$

Como  $\rho$  varia somente com o tempo, supondo que se mantenha homogêneo dentro do tanque, a derivada parcial pode ser substituída pela total.

$$V \frac{d\rho}{dt} = -Q_m$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = (1 - \alpha t^2)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -2\rho_0 \alpha t$$

$$Q_m = 2\rho_0 V \alpha t = 2 \times 5 \times 10 \times 0,005 \times 10 = 5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$b) \quad Q = \frac{Q_m}{\rho}$$

$$\text{No instante } t = 10\text{s} \rightarrow \rho = 5 \times (1 - 0,005 \times 10^2) = 2,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$Q = \frac{5}{2,5} = 2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$c) \quad v = \frac{Q}{A} = \frac{2}{0,5} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$d) \quad m = \rho V = 2,5 \times 10 = 25 \text{kg}$$

e) Obviamente, a vazão na saída será interrompida quando a pressão interna se igualar com a externa. Supondo que a pressão externa é igual à pressão atmosférica de  $1 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$

$$P_{\text{final}} = P_0 (1 - \alpha t^2)$$

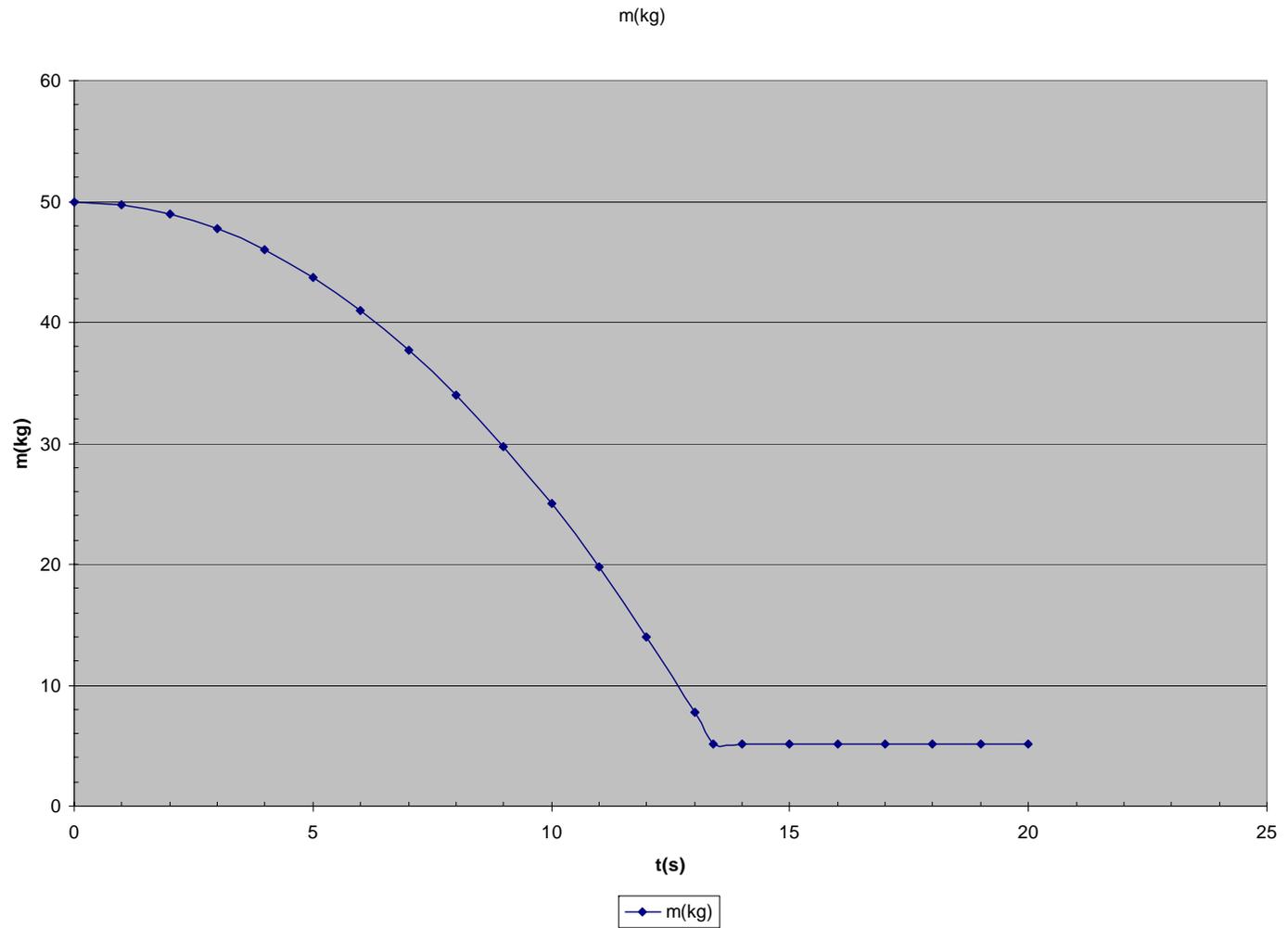
$$t = \sqrt{\frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{P_{\text{final}}}{P_0} \right)} = \sqrt{\frac{1}{0,005} \times \left( 1 - \frac{1}{10} \right)} = 13,4 \text{s}$$

$$f) \quad \rho_{\text{final}} = \rho_0 (1 - \alpha t^2) = 5 \times (1 - 0,005 \times 13,4^2) = 0,51 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$m_{\text{final}} = \rho_{\text{final}} V = 0,51 \times 10 = 5,1 \text{kg}$$

g)  $m = 50 \times (1 - 0,005t^2)$

t(s)	m(kg)
0	50
1	49,75
2	49
3	47,75
4	46
5	43,75
6	41
7	37,75
8	34
9	29,75
10	25
11	19,75
12	14
13	7,75
13,4	5,11
14	5,11
15	5,11
16	5,11
17	5,11
18	5,11
19	5,11
20	5,11

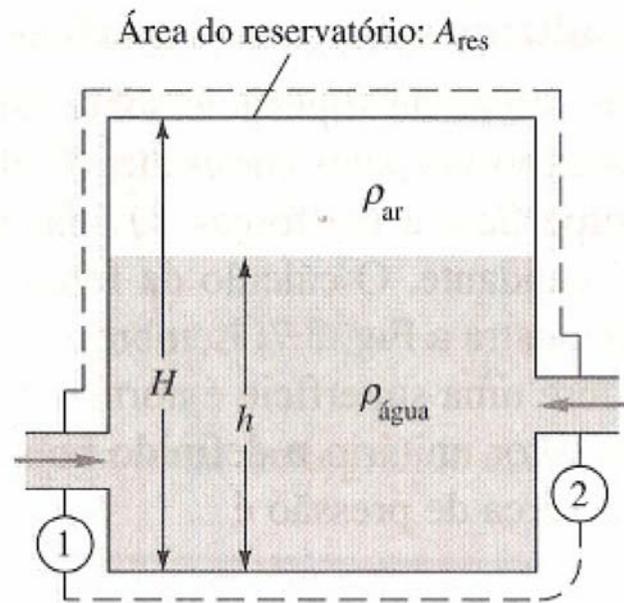


## Extra

O reservatório a seguir se enche de água por meio de duas entradas unidimensionais. Ar é aprisionado no topo do reservatório. A altura da água é  $h$ .

A) Encontre uma expressão para a variação da altura de água ( $dh/dt$ ).

B) Calcule  $dh/dt$  para  $D_1=25$  mm;  $D_2=75$  mm;  $v_1=0,9$  m/s;  $v_2=0,6$  m/s e área do reservatório igual a  $0,18$  m<sup>2</sup>, considerando a água a 20°C.



# Resolução

A)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \times \vec{n} dA = 0$$

Como só existem entradas tem - se que :  $\vec{v} \times \vec{n} = v \cos 180^\circ = -v$ , portanto :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV - \rho_1 v_1 A_1 - \rho_2 v_2 A_2 = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV = \frac{d}{dt} (\rho_{\text{água}} A_{\text{res}} h) + \frac{d}{dt} (\rho_{\text{ar}} A_{\text{res}} (H - h))$$

$\frac{d}{dt} (\rho_{\text{ar}} A_{\text{res}} (H - h)) = 0$ , pois como o ar está confinado pode - se considerar a sua massa constante.

$$\text{Portanto : } \frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2}{\rho_{\text{água}} A_{\text{res}}}$$

$$\text{Como : } \rho_1 = \rho_2 = \rho_{\text{água}} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_{\text{res}}} = \frac{Q_1 + Q_2}{A_{\text{res}}}$$

## Resolução (cont.)

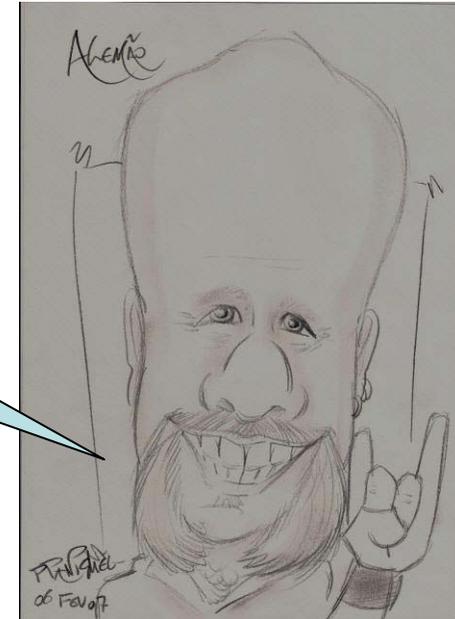
B)

$$Q_1 = v_1 A_1 = 0.9 \times \frac{\pi \times 0.025^2}{4} \cong 0.442 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_2 = v_2 A_2 = 0.6 \times \frac{\pi \times 0.075^2}{4} \cong 2.651 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.442 \times 10^{-3} + 2.651 \times 10^{-3}}{0.18} \cong 0.017 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Começar a refletir sobre o tempo de esvaziamento de reservatório com áreas não constante.



$$t = \frac{1}{C_d \times A_{\text{bocal}} \times \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} h^{-1/2} A_{\text{tanque}} dh$$

onde seria fundamental se obter a função:

$$A_{\text{tanque}} = f(h)$$