Quarta aula

04/03/2008

A terceira aula de complemento foi encerrada com a proposta da 1ª parte da 3ª atividade: aplicar a equação de Poiseuille para a determinação da vazão do escoamento

Mas qual a validade da equação de Poiseuille?

$$\Delta p = \frac{32 \times \mu \times L \times v}{D_H^2}$$

Através da primeira parte desta atividade procurou-se enfatizar que a equação de Poiseuille é válida para o escoamento laminar.

A conclusão anterior foi proposta no provão de 1997, cujo enunciado é transcrito no slide a seguir.

Através de uma série de experimentos em escoamentos através de dutos, foi desenvolvida uma expressão relativa à perda de carga distribuída (perda de carga que ocorre nos trechos retos da tubulação) na forma de:

$$h_D = f\,(L/D)\,V^2/2g \qquad (1)$$

sendo f conhecido como fator de atrito (Darcy-Weisbach ou Fanning), cuja relação funcional é suposta da forma:

$$f = f(D, V, \rho, \mu, \varepsilon) \qquad (2)$$

Aplicando a metodologia da Análise Dimensional - teorema π de Buckingham - chega-se a:

$$f = f(DV\rho/\mu, \varepsilon/D) \qquad (3)$$

a) Obtenha a expressão de f, no caso de escoamento laminar estabelecido de um fluido Newtoniano incompressível, para o qual o perfil de velocidade é expresso por:

$$V_z = 2V\,[\,1 - (r/R)^2\,], \text{ onde } V = \Delta P\, R^2 / 8\,\mu L \qquad (4)$$

b) Discuta, se houver, as diferenças entre a resposta do item (a) com a expressão (3).

Grandeza Física	Definição	Representação Dimensional
D	diâmetro do duto	L
g	aceleração da gravidade	LT^{-2}
L	comprimento do duto	L
r	distância radial	L
R	raio do duto	L
V	velocidade média de área	LT^{-1}
ΔP	diferença de pressão	$ML^{-1}\ T^{-2}$
ε	rugosidade média do material do tubo	L
ρ	massa específica	ML^{-3}
μ	viscosidade dinâmica	$ML^{-1}\ T^{-1}$

Resolução dada pelo sítio
http://www.inep.gov.br/download/enc/1997/gabaritos/gab_equi2.pdf

Questão n.º 5:

Conteúdo(s) principal(ais) da questão: Fenômenos de Transporte (Fenômeno de perda de carga, básico nos problemas de escoamento presentes nas operações unitárias).

Habilidades aferidas: Capacidades de: consolidação de conhecimentos teóricos; leitura e interpretação (de textos e representações simbólicas); organizar idéias e comunicá-las.

Padrão de Resposta Esperado:

(a) Parte-se da expressão (4):

$$V = \frac{\Delta P R^2}{8 \mu L} = \frac{\Delta P D^2}{32 \mu L}$$

Dividindo-se ambos os membros por ρg, tem-se:

$$\frac{V}{\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g} \frac{D^2}{32\mu L} \qquad \text{(A)}$$

O termo $\frac{\Delta p}{\rho g}$ equivale à perda de carga distribuída h_D, dada pela equação (1) do enunciado, o que pode ser demonstrado a partir do balanço de carga (energia/peso):

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + h_D.$$

Considerando-se $V_1 = V_2 = V$ (equação da continuidade) e $Z_1 = Z_2$ (tubo horizontal), resulta:

$$h_D = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g}.$$

Então, substituindo-se $\frac{\Delta P}{\rho g}$ na equação (A) pelo lado direito da equação (1) do enunciado, resulta:

$$\frac{V}{\rho g} = f\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right)\frac{D^2}{32\mu L}$$

Simplificando-se esta expressão, resulta f = $\frac{64\mu}{DV\rho} = \frac{64}{Re}$

(b) Na equação (3) aparece a rugosidade média do material do tubo(ε), que não aparece na resposta do item (a).

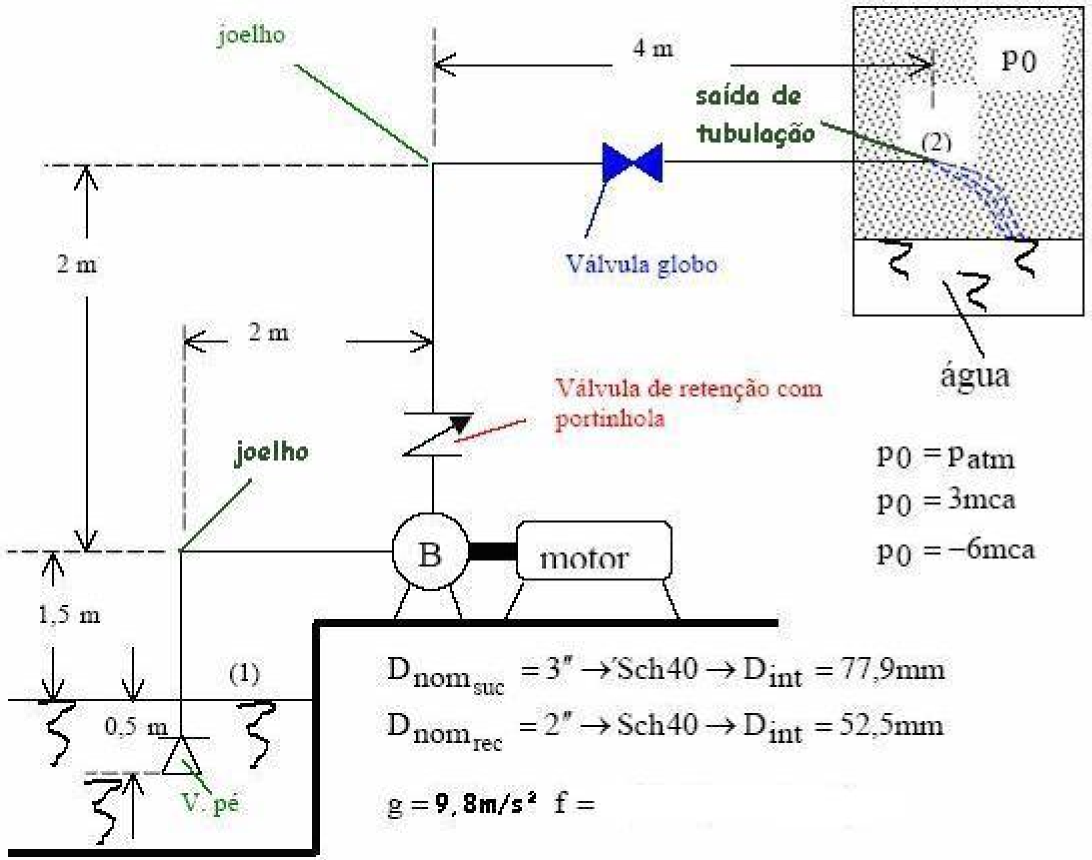
Isto se explica pelo fato de que o item (a) se refere ao escoamento laminar, em que predominam as forças viscosas que tamponam qualquer efeito de perturbação do escoamento originado pelas condições da parede-rugosidade e dos efeitos externos.

CCI = Curva Característica da Instalação

Em uma instalação de bombeamento representa a carga que o sistema necessita receber (H_S) para que o fluido percorra a instalação com uma vazão Q.

Primeiro exemplo

Obter a equação da CCI para a instalação hidráulica esquematizada abaixo



Dados os comprimentos equivalentes abaixo

Diâmetro nominal polegada	Válvula de pé Leq (m)	Joelho Leq (m)	Válvula de retenção com portinhola Leq (m)	Válvula globo Leq (m)	Saída de tubulação Leq (m)
2	19,81	1,88	2,68	17,60	1,5
3	32	2,82	3,95	25,90	2,2

Para uma instalação hidráulica com uma entrada e uma saída a CCI é obtida aplicando-se a equação da energia da seção inicial à seção final, ou seja:

$$H_{inicial} + H_S = H_{final} + H_{p_{totais}}$$

Para a equação anterior se transformar na equação da CCI o parâmetro correspondente a velocidade média (v) deve ser substituída por Q/A. Considerando uma instalação com um único diâmetro, tem-se que:

$$H_S = (z_f - z_1) + \left(\frac{p_f - p_i}{\gamma}\right) + \frac{\alpha_f \times y_f \times Q^2}{2g \cdot A_f^2} - \frac{\alpha_i \times y_i \times Q^2}{2g \cdot A_i^2} + f \times \frac{(L + \sum Leq)}{D_H} \times \frac{Q^2}{2g \cdot A^2}$$

A equação anterior apresenta a soma de dois termos que não dependem da vazão e que originam o que se denomina de carga estática ($H_{estática}$)

$$H_{estática} = (z_f - z_i) + \left(\frac{p_f - p_i}{\gamma}\right)$$

Continuando considerando uma instalação com um único diâmetro a condição para que a mesma opere sem bomba (H_S=0) é que sua carga estática seja negativa, já que:

$$Q_{qL} = \sqrt{\frac{-H_{estática}}{B_{instalação}}}$$

$$B_{instalação} = \frac{\alpha_f \times y_f}{2g \times A_f^2} - \frac{\alpha_i \times y_i}{2g \times A_i^2} + f \times \frac{\left(L + \sum Leq\right)}{D_H} \times \frac{1}{2g \times A^2}$$

$$B_{instalação} \rightarrow \text{é sempre} > 0$$

Importante:

α - só é definido para seções de tubos, onde: α = 1,0 se o escoamento for turbulento e α = 2,0 se o escoamento for laminar.

Y = 0 – quando a seção considerada for nível de reservatório.

Y = 1,0 – quando a seção considerada for a seção de tubo.

Adotando-se o PHR em (1), trabalhando na escala efetiva e considerando o escoamento turbulento, tem-se que:

$$H_1 + H_S = H_2 + H_{p_{3''}} + H_{p_{2''}}$$

$$H_S = z_2 + \frac{p_0}{\gamma_{água}} + \frac{Q^2}{2g \times A_{2''}^2} + H_{p_{3''}} + H_{p_{2''}}$$

$$H_{p_{3''}} = f_{3''} \times \frac{\left(L + \sum Leq\right)_{3''}}{D_{H_{3''}}} \times \frac{Q^2}{2g \times A_{3''}^2}$$

$$H_{p_{2''}} = f_{2''} \times \frac{\left(L + \sum Leq\right)_{2''}}{D_{H_{2''}}} \times \frac{Q^2}{2g \times A_{2''}^2}$$

$$H_S = 3{,}5 + \frac{p_0}{\gamma_{água}} + \frac{Q^2}{2 \times 9{,}8 \times \left(21{,}7 \times 10^{-4}\right)^2} + H_{p_{3''}} + H_{p_{2''}}$$

$$H_{p_{3''}} = f_{3''} \times \frac{(4 + 32 + 2{,}82)}{0{,}0779} \times \frac{Q^2}{2 \times 9{,}8 \times \left(47{,}7 \times 10^{-4}\right)^2} =$$

$$H_{p_{3''}} = f_{3''} \times 1117442{,}652 \times Q^2$$

$$H_{p_{2''}} = f_{2''} \times \frac{(6 + 2{,}68 + 1{,}88 + 17{,}60 + 1{,}5)}{0{,}0525} \times \frac{Q^2}{2 \times 9{,}8 \times \left(21{,}7 \times 10^{-4}\right)^2}$$

$$H_{p_{2''}} = f_{2''} \times 6121196{,}260 \times Q^2$$

$$H_S = 3{,}5 + \frac{p_0}{\gamma_{água}} + 10834{,}889 \times Q^2 + f_{3''} \times 1117442{,}652 \times Q^2 + f_{2''} \times 6121196{,}260 \times Q^2$$

1ª situação: $p_0 = p_{atm}$

$$H_S = 3{,}5 + 10834{,}889 \times Q^2 + f_{3''} \times 1117442{,}652 \times Q^2 + f_{2''} \times 6121196{,}260 \times Q^2$$

Como a carga estática é igual a 3,5 m, pode - se concluir que a instalação só opera na presença de uma bomba hidráulica.

2ª situação

$$\frac{p_0}{\gamma_{água}} = 3mca$$

$$H_S = 6{,}5 + 10834{,}889 \times Q^2 + f_{3''} \times 1117442{,}652 \times Q^2 + f_{2''} \times 6121196{,}260 \times Q^2$$

Como a carga estática é igual a 6,5 m, pode - se concluir que a instalação só opera na presença de uma bomba hidráulica.

3ª situação

$$\frac{p_0}{\gamma_{água}} = -6mca$$

$$H_S = -2{,}5 + 10834{,}889 \times Q^2 + f_{3''} \times 1117442{,}652 \times Q^2 + f_{2''} \times 6121196{,}260 \times Q^2$$

Como a carga estática é igual a - 2,5 m, pode - se concluir que a instalação pode operar sem a presença de uma bomba hidráulica.