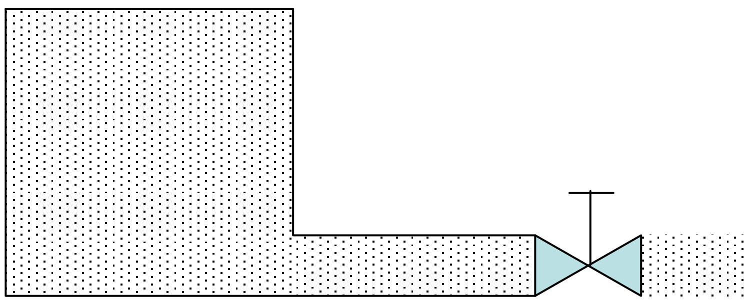
Complemento de mecânica dos fluidos

Exercícios de aplicação da equação da continuidade de forma integral para um volume de controle

Exercícios

10.1 (livro Brunetti p. 270 e 271) - Um reservatório contém um gás e tem uma válvula que controla a sua saída de forma que a pressão interna seja reduzida segundo a lei: $p = p_0(1 - \alpha t^2)$.
Sabe-se que durante a descarga a temperatura do gás do reservatório mantém-se constante (processo isotérmico p/ρ = cte) e que no instante t = 10s a passagem de abertura da válvula tem uma área de 0,5 m^2. Determinar para o instante t = 10s:

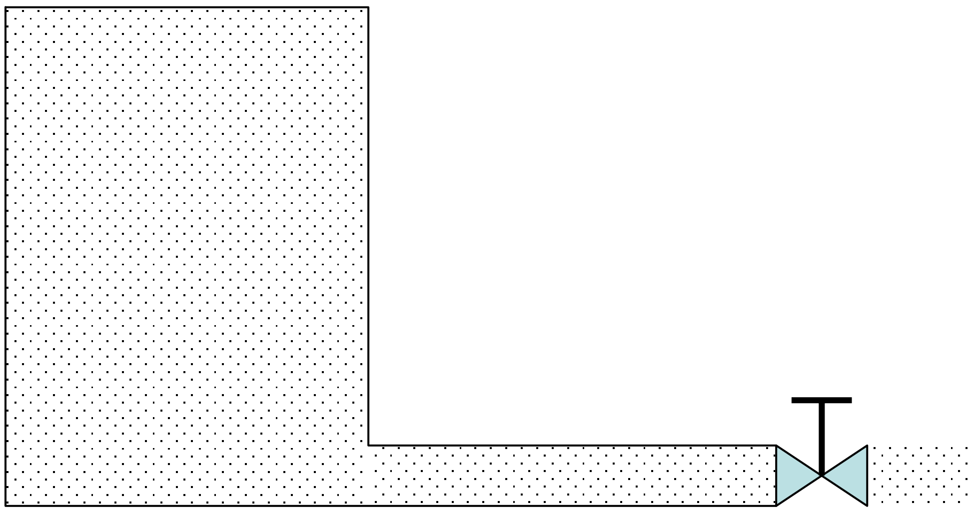
a) a vazão em massa do gás;
b) a vazão em volume;
c) a velocidade média na seção de saída;
d) a massa do gás que resta no reservatório;
e) o tempo de esvaziamento do reservatório;
f) a massa do gás no reservatório após o esvaziamento;
g) traçar a curva de esvaziamento do reservatório m = m(t).



$$\text{Dados}: V = 10m^3; \rho_0 = 5\frac{kg}{m^3}; p_0 = 10\frac{kgf}{cm^2}(\text{abs});$$

$$\alpha = 0{,}005 s^{-2}; p_{atm_{local}} = 1\frac{kgf}{cm^2}.$$

Resolução do exercício 10.1 - livro prof. Brunetti



Dados:

$$V = 10m^3$$

$$\rho_o = 5\frac{kg}{m^3}$$

$$p_0 = 10\frac{kgf}{cm^2}(abs)$$

$$\alpha = 0{,}005s^{-2}$$

$$P_{atm_{local}} = 1\frac{kgf}{cm^2}$$

a) $$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV + \int_{SC}\rho\vec{v}\times\vec{n}dA = 0$$

Adotando um VC que envolva todo o fluido, tem-se fluxo apenas na seção de saída, onde $\vec{v}\times\vec{n}$ é positivo. Além disso, nota-se que o volume do VC é constante, ao passo que, com o passar do tempo, tem-se a variação da massa específica do gás dentro do VC. Dessa forma:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \rho v A = 0$$

Como ρ varia somente com o tempo, supondo que se mantenha homogêneo dentro do tanque, a derivada parcial pode ser substituída pela total.

$$V\frac{d\rho}{dt} = -Q_m$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = \left(1-\alpha t^2\right)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -2\rho_0\alpha t$$

$$Q_m = 2\rho_0 V\alpha t = 2\times 5\times 10\times 0{,}005\times 10 = 5\frac{kg}{s}$$

b) $Q = \frac{Q_m}{\rho}$

No instante $t = 10\,s \rightarrow \rho = 5 \times \left(1 - 0{,}005 \times 10^2\right) = 2{,}5 \frac{kg}{m^3}$

$$Q = \frac{5}{2{,}5} = 2 \frac{m^3}{s}$$

c) $v = \frac{Q}{A} = \frac{2}{0{,}5} = 4 \frac{m}{s}$

d) $m = \rho V = 2{,}5 \times 10 = 25\,kg$

e)

Obviamente, a vazão na saída será interrompida quando a pressão interna se igualar com a externa. Supondo que a pressão externa é igual à pressão atmosférica de $1 \frac{kgf}{cm^2}$

$$p_{final} = p_0\left(1 - \alpha t^2\right)$$

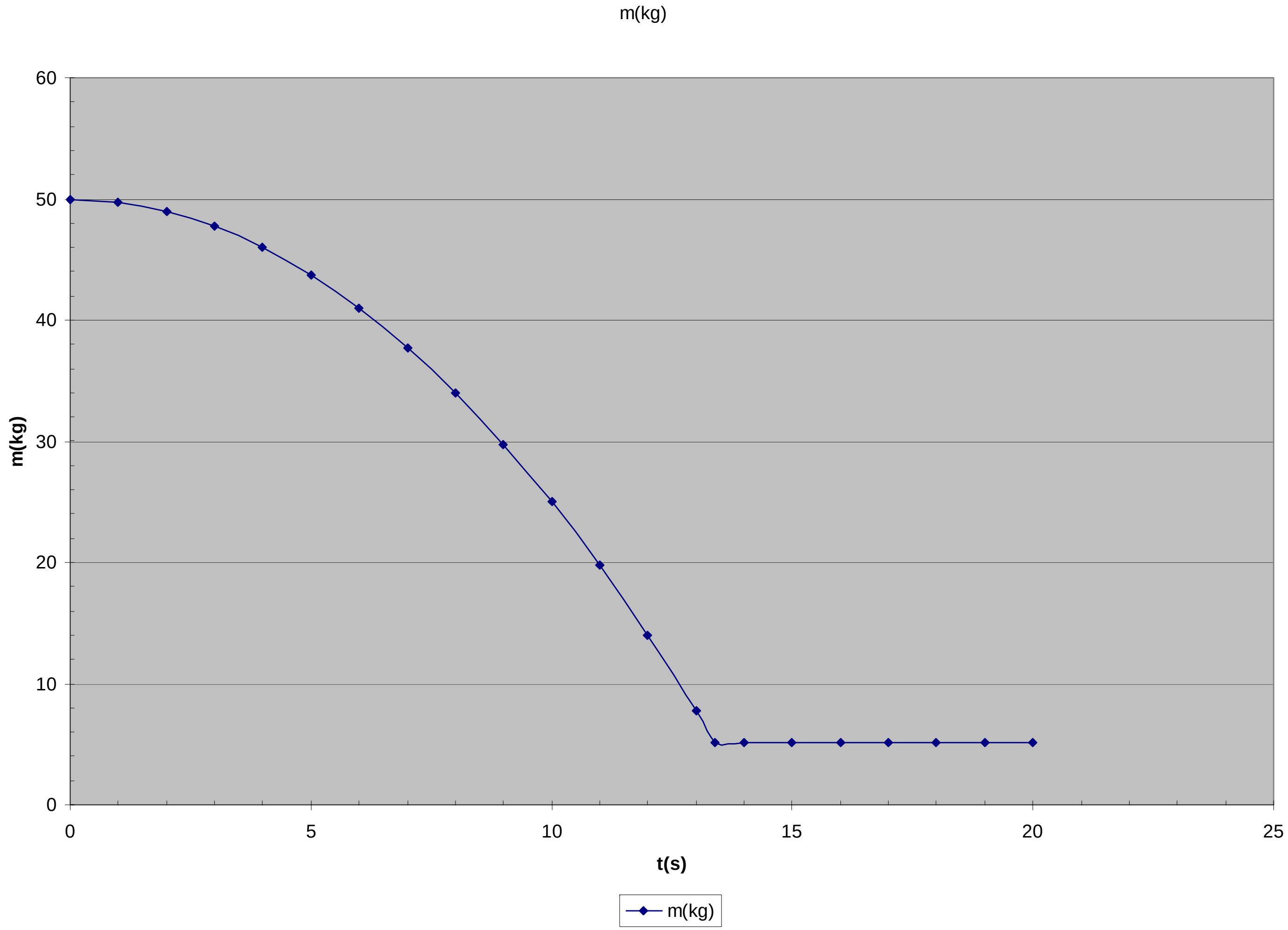
$$t = \sqrt{\frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{p_{final}}{p_0}\right)} = \sqrt{\frac{1}{0{,}005} \times \left(1 - \frac{1}{10}\right)} = 13{,}4\,s$$

f) $\rho_{final} = \rho_0\left(1 - \alpha t^2\right) = 5 \times \left(1 - 0{,}005 \times 13{,}4^2\right) = 0{,}51 \frac{kg}{m^3}$

$$m_{final} = \rho_{final} V = 0{,}51 \times 10 = 5{,}1\,kg$$

g) $$m = 50 \times (1 - 0{,}005t^2)$$

t(s)	m(kg)
0	50
1	49,75
2	49
3	47,75
4	46
5	43,75
6	41
7	37,75
8	34
9	29,75
10	25
11	19,75
12	14
13	7,75
13,4	5,11
14	5,11
15	5,11
16	5,11
17	5,11
18	5,11
19	5,11
20	5,11

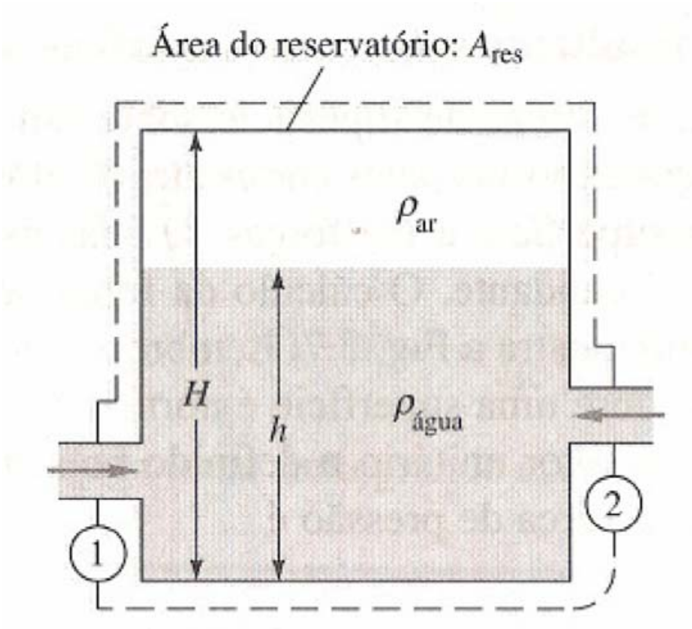


Extra

O reservatório a seguir se enche de água por meio de duas entradas unidimensionais. Ar é aprisionado no topo do reservatório. A altura da água é h.

A) Encontre uma expressão para a variação da altura de água (dh/dt).

B) Calcule dh/dt para D_1=25 mm; D_2=75 mm; v_1=0,9m/s; v_2=0,6m/s e área do reservatório igual a 0,18m^2, considerando a água a 20^{0}C.



Área do reservatório: A_{res}
ρ_{ar}
H
h
$\rho_{água}$
1
2

Resolução

A)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV + \int_{SC}\rho\vec{v}\times\vec{n}dA = 0$$

Como só existem entradas tem - se que : $\vec{v}\times\vec{n} = v\cos 180^\circ = -v$, portanto :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV - \rho_1 v_1 A_1 - \rho_2 v_2 A_2 = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV = \rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho dV = \frac{d}{dt}(\rho_{água}A_{res}h) + \frac{d}{dt}(\rho_{ar}A_{res}(H-h))$$

$\frac{d}{dt}(\rho_{ar}A_{res}(H-h)) = 0$, pois como o ar está confinado pode - se considerar a sua massa constante.

Portanto : $\frac{dh}{dt} = \frac{\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2}{\rho_{água}A_{res}}$

Como : $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{água} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_{res}} = \frac{Q_1 + Q_2}{A_{res}}$

Resolução (cont.)

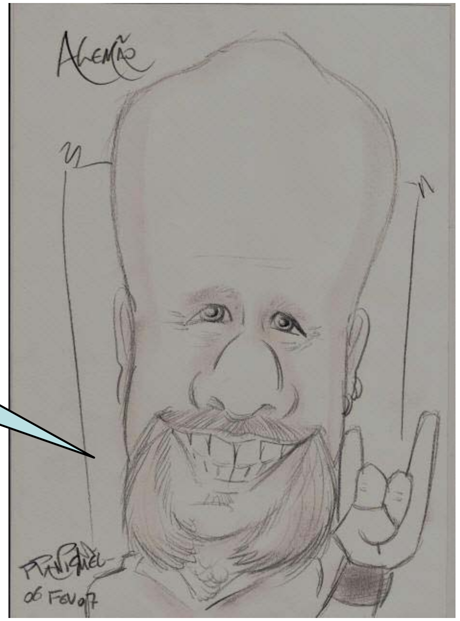
B)

$$Q_1 = v_1 A_1 = 0.9 \times \frac{\pi \times 0.025^2}{4} \cong 0.442 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

$$Q_2 = v_2 A_2 = 0.6 \times \frac{\pi \times 0.075^2}{4} \cong 2.651 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.442 \times 10^{-3} + 2.651 \times 10^{-3}}{0.18} \cong 0.017 \frac{m}{s}$$

Começar a refletir sobre o tempo de esvaziamento de reservatório com áreas não constante.



$$t = -\frac{1}{C_d \times A_{bocal} \times \sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} h^{-1/2} A_{tanque}\, dh$$

onde seria fundamental se obter a função:

$$A_{tanque} = f(h)$$